

# EL ÁLGEBRA LINEAL Y LOS SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS en la Facultad de Ingeniería, UNLP

Viviana Angélica Costa<sup>1</sup>, María Cristina Vacchino<sup>2</sup>

**Abstract** — *The curricular change implemented at the UNLP College of Engineering in 2003 was fundamentally based upon two concepts: the reorganization of content around conceptual axes and a new teaching methodology. This change led to discussions between the teachers and motivated them to carry out plans and take action in the classroom to improve the quality of teaching. In this work we refer to the subject of Mathematics C (Linear Algebra), which was previously given in two consecutive Calculus courses, and describe the way in which the subject's content is currently taught, especially in the area of Linear Systems of Ordinary Differential Equations. To improve the teaching of this particular area, we present a proposal that includes the mathematic concepts of problem solving, applications in the different branches of engineering, graphic representations, and the utilization of software as a tool to study the performance of dynamic systems.*

*Index Terms* – Linear Algebra, Linear Systems of Differential Equations, Teaching.

## INTRODUCCIÓN

La enseñanza del álgebra lineal reviste ciertas características muy especiales. Para la enseñanza de objetos como espacios vectoriales, transformaciones lineales, valores y vectores propios, etc. se parte de la definición formal, sin que en la mayoría de las veces medie una motivación previa similar a lo que ocurre, por ejemplo en el cálculo. En el cálculo, es frecuente motivar la enseñanza de los conceptos a partir de otros conocimientos físicos o geométricos presentados previamente, pero en el álgebra lineal, la mayor parte de los conceptos se presentan como definiciones formales de objetos cuya existencia no tiene (en la mayoría de los casos) conexión con conocimientos previos ni argumentos geométricos o físicos que motiven la definición presentada.

Los primeros trabajos en investigación en educación matemática se desarrollaron sobre cálculo, pero en los últimos 20 años varios grupos de investigadores están trabajando sobre la didáctica del álgebra lineal.

La enseñanza de álgebra lineal es universalmente reconocida como difícil [6-7] cualquiera sea la orientación que se dé a la materia (matricial, axiomática, geométrica,

computacional) debido a las dificultades conceptuales y al tipo de pensamiento requerido para la comprensión de la asignatura.

En el año 1990, dada la problemática que presentaba el aprendizaje de Álgebra Lineal, se forma el Linear Algebra Curriculo Study Group (LACSG), conformado por: David Carlson, Charles R. Johnson, David C. Lay y A. Duane Porter, para mejorar el currículo de Álgebra Lineal. Son ellos quienes proponen apartarse de la abstracción y acercarse a un curso más concreto, basado en matrices.

Recientemente varios grupos de investigadores están trabajando sobre la didáctica del álgebra lineal. Entre ellos un grupo francés integrado por Jean Luc Dorier, Aline Robert, Jacqueline Robinet, Marc Rogalski, Michele Artigue, Marlene Alves Dias, Ghislaine Chartier, un grupo canadiense con Anna Sierpinska y Joel Hillel, y en EEUU Guershon Harel, Ed Dubinsky.

En algunas investigaciones en torno a los problemas en el aprendizaje del álgebra lineal se reporta que entre los orígenes de esas dificultades están los diversos lenguajes que se usan para hablar de conceptos como espacios vectoriales, transformaciones lineales, matrices, etc. [11]. El uso de estos lenguajes sin articulación son, muchas veces el origen de algunas de las dificultades para el aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal [13]. Entre esos lenguajes están: el lenguaje abstracto, el lenguaje algebraico de  $\mathbb{R}^n$  y el lenguaje geométrico de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  [11]. Cada uno de estos tipos de lenguaje desarrolla, en forma correspondiente los tipos de pensamiento necesarios para que un estudiante pueda entender la materia.

En particular en la Facultad de Ingeniería de la UNLP, en el año 2002 un grupo de Profesores, preocupados por lograr un mejoramiento en la enseñanza de la matemática, que se viera reflejado en un mejor rendimiento de los alumnos, comienzan a analizar las dificultades de estos en el proceso de aprendizaje de la Matemática Básica y en particular del Álgebra Lineal. Anterior al cambio de plan el curso de Álgebra comenzaba con temas como lógica proposicional, tablas de verdad y teoría de conjuntos, a pesar de ello el excesivo formalismo, la falta de madurez de los estudiantes y la imposibilidad de usar la intuición geométrica hacían dificultoso su aprendizaje.

1 Viviana A. Costa, Imapec, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP, La Plata 1 y 47, Buenos Aires, Argentina, [vacosta@ing.unlp.edu.ar](mailto:vacosta@ing.unlp.edu.ar)

2 María Cristina Vacchino, Gidie, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP, La Plata 1 y 47, Buenos Aires, Argentina, [crystina.vacchino@ing.unlp.edu.ar](mailto:crystina.vacchino@ing.unlp.edu.ar)

El grupo de Profesores entiende que era necesario pensar en un cambio [2-3]. Finalmente a fines del año 2002 se modifican los planes de estudio con el objetivo de integrar las asignaturas de matemática con el resto de las áreas y materias, mejorar el rendimiento de los estudiantes en dichas asignaturas y disminuir la dificultad de los estudiantes en recuperar los conceptos matemáticos en otros contextos. El esquema diseñado se basó en la organización de los contenidos alrededor de ejes conceptuales comunes, en un cambio metodológico y en la redistribución de los recursos existentes a fin de mejorar la calidad de la enseñanza impartida. Se definió así, un trayecto básico de matemática integrado por tres materias consecutivas, dos de Cálculo (Matemática A y B) y la tercera que incluye los contenidos básicos de Álgebra Lineal (Matemática C).

Esta nueva estructura nos lleva a realizar un seguimiento constante de las nuevas asignaturas, utilizando diferentes medios para hacerlo, entre ellos: encuesta a los alumnos, entrevistas a docentes, análisis de las guías impresas teórico-prácticas, análisis de los contenidos y de la bibliografía utilizada y el análisis de resultados cuantitativos (número de alumnos promocionados, recursantes y número de alumnos que sólo aprobaron trabajos prácticos)[5-6].

En este trabajo se hace un análisis de la implementación de la asignatura Matemática C en lo referido a los contenidos de *Álgebra Lineal* y su relación con la resolución de los *Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Se presenta una propuesta más abarcativa para el dictado de los SLEDO que combine la modelización, lo analítico y lo gráfico, para que no queden solo como una mera aplicación del Álgebra Lineal.

## COMO SE ENSEÑA ÁLGEBRA LINEAL EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNLP

El Plan de estudios 2002 comenzó a implementarse a partir del año 2003 en todas las carreras de Ingeniería y en particular Matemática C en el año 2004. Los contenidos de Matemática, a partir del 2002, se organizaron en un trayecto básico estructurado según ejes comunes. La asignatura Matemática C de nueve horas semanales, se dicta en el tercer semestre de todas las carreras de Ingeniería, después de dos cursos intensivos de Cálculo en una y varias variables. Esto hace que los alumnos ya posean una metodología de trabajo y sean capaces de relacionar y conectar con conocimientos previos.

Sintéticamente sus contenidos son: Series numéricas y de funciones - Matrices, sistemas de ecuaciones lineales, matriz inversa, determinante, rango - Espacios vectoriales, bases, dimensión - Transformaciones lineales - Autovalores y autovectores de una transformación lineal - Diagonalización de matrices - Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y sistemas lineales de ecuaciones diferenciales - Álgebra Lineal Numérica: Teoría de errores. Aproximación de raíces de ecuaciones no lineales. Matrices y operaciones relacionadas sobre un

computador. Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Jacobi y Gauss-Seidel.

Los aspectos más notables que se introdujeron en la organización de Matemática C son:

- La materia contempla lo analítico y lo numérico como un todo.
- Se incorporaron a la asignatura más temas y aplicaciones.
- Se utiliza como bibliografía los libros de “Álgebra Lineal” de autores como Stanley I. Grossman, David Poole, David C Lay; que siguen las recomendaciones dadas por el grupo Linear Algebra Curriculum Study Group.
- Se utilizan herramientas tecnológicas, como ser la utilización de software matemático (MAPLE Y/O MATLAB), para mejorar la comprensión y visualización de algunos conceptos.
- Se enfatiza en las relaciones que hay entre los conceptos de la misma asignatura como también de asignaturas anteriores.
- La transición hacia la abstracción es suave. Se comienza estudiando  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  tratando de recuperar conceptos vistos en las materias de cálculo para luego pasar a  $\mathbb{R}^n$  en detalle y por último, a espacios más generales. Similarmente se tratan las transformaciones lineales y autovalores.
- Se da importancia a la conceptualización, a las aplicaciones del Álgebra Lineal y a las gráficas (rotaciones, proyecciones y reflexiones en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ ).
- Sólo se demuestran los resultados más importantes.

### Enfoque de los conocimientos previos

En el segundo curso de Cálculo (Matemática B) se enseñan las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden utilizando un enfoque que conjuga los métodos analíticos, la modelación, y la visualización apoyada en la computadora. Esta forma de estudiar las ecuaciones diferenciales, les brinda a los alumnos una poderosa herramienta de amplia aplicación en la industria, la ingeniería y, en general, en la ciencia. De este modo, se ofrece al estudiante una visión completa que muestra cómo utilizar las ecuaciones diferenciales en diversos campos del conocimiento, lo cual, aunado al apoyo que prestan los recursos electrónicos como el software de matemáticas MAPLE resulta estimulante y pedagógicamente fructífero. Los aspectos más notables considerados en ese curso son los siguientes: incluye un gran número de modelos, se pone énfasis en la visualización gráfica, se ofrece un vasto conjunto de ejemplos y problemas, se muestra la aplicación de las ecuaciones diferenciales en distintos campos, se fomenta el uso de la computadora para visualizar y resolver problemas complejos.

## **Cómo se enseñan los Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en la actualidad**

Actualmente los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, se enseñan, como una aplicación directa del Álgebra Lineal, en particular como aplicación de los autovalores y autovectores. Solo se imparte la parte teórica en general y la resolución analítica en particular para los sistemas con coeficientes constantes. No se motiva el tema con ejemplos directos de aplicación a la Ingeniería, no se utiliza software para la gráfica de las soluciones y su interpretación, no se menciona la parte numérica, ni la posible resolución de sistemas no lineales y el análisis del comportamiento de los mismos. En dos semanas de clase los alumnos logran aprender “mecánicamente” la resolución de los sistemas, pero sin ningún tipo de motivación, aplicación y análisis de las soluciones.

## **PROPUESTA DE CAMBIO PARA LA ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES ORDINARIAS**

### **Un poco de historia**

Los sistemas de ecuaciones diferenciales surgieron con la misma intención que las ecuaciones diferenciales ordinarias: analizar cuantitativamente determinados sistemas físicos, en particular los astronómicos. En el campo de la astronomía los principios físicos (las leyes del movimiento de Newton y la ley de gravitación) estaban claros pero los problemas matemáticos no. El problema matemático fundamental al estudiar el movimiento de dos o más cuerpos, moviéndose cada uno bajo la acción gravitatoria de los otros es el de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El primer éxito lo obtuvo Newton en los Principia al demostrar que a partir de sus leyes de movimiento y de la ley de gravitación universal se podían deducir las tres leyes planetarias de Kepler. El problema de los tres cuerpos sometidos a una acción gravitatoria común fue estudiado intensamente por Euler, Laplace y Lagrange obteniendo sólo resultados parciales.

Al no obtener métodos generales para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales, los matemáticos se volcaron a los sistemas de ecuaciones lineales de coeficientes constantes. Este tipo de sistemas surgió por primera vez al estudiar sistemas de muelles acoplados, a partir de la ley de Hooke. La noción de polinomio característico aparece ya explícitamente en el trabajo de Lagrange sobre sistemas de ecuaciones diferenciales publicado en 1774 y en el trabajo de Laplace en 1775.

Por otra parte, Laplace en el famoso ensayo *Théorie analytique des probabilités*, publicado en 1812, presentó lo que ahora se conoce como la transformada de Laplace para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes y sirve también, para encontrar la

solución de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

Posteriormente, a principios del siglo XIX se trató de demostrar algunos hechos dados por válidos en el siglo anterior. En 1820, Cauchy probó bajo ciertas condiciones la existencia de soluciones de la ecuación diferencial de primer orden. En 1890 Picard estableció un método de aproximaciones sucesivas que permite establecer con precisión el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales de orden  $n$ .

Posteriormente, Cauchy, al tratar de demostrar el mismo teorema para los sistemas de ecuaciones diferenciales, introdujo la notación vectorial que todavía se utiliza hoy en día. Generalización que, utilizando los conceptos matriciales introducidos por Cayley a mediados del siglo XIX, ayudó a Jacobi a resolver completamente los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes donde la matriz del sistema es diagonalizable. Posteriormente Jordan introdujo lo que hoy se conoce como la forma canónica de Jordan precisamente para resolver los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales donde la matriz no es diagonalizable. Las investigaciones de Poincaré, a fines del siglo XIX, sobre la estabilidad y periodicidad de las soluciones del sistema solar lo condujeron al inicio de la teoría de las ecuaciones diferenciales no lineales [1-12].

### **Análisis del tema en la nueva bibliografía**

En los libros actuales de Álgebra Lineal, que siguen los lineamientos del Linear Algebra Curriculum Study Group, el tema ecuaciones diferenciales se encuentra desarrollado en los textos en una sección como una aplicación directa del tema autovalores y autovectores, proporcionando de esta forma la clave para describir el comportamiento dinámico de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias. De esta forma se conectan las ecuaciones diferenciales con el Álgebra Lineal, sin el análisis del comportamiento dinámico. Encontrándose esto en los libros actuales de Ecuaciones diferenciales [10].

### **Propuesta**

En el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales, nos hemos centrado en el problema de obtener soluciones aplicando lo estudiado en Álgebra Lineal para el caso de los sistemas lineales con coeficientes constantes. Dado que muchas ecuaciones diferenciales no las sabemos resolver e incluso, aunque se pudieran encontrar sus soluciones, a veces no es necesario determinarlas explícitamente pues sólo se requiere conocer el comportamiento de las mismas. Por ello, nuestra propuesta pretende ser más abarcativa, tratando de obtener además, información cualitativa sobre el comportamiento de las soluciones. Estos jugarán un papel primordial en el estudio de la clasificación de los puntos de equilibrio de un *sistema no lineal*.

Como ejemplo de lo que proponemos pensemos en el modelo predador-presa de Lotka-Volterra. Este problema se modela mediante un sistema de ecuaciones diferenciales no

lineales, el cual no puede resolverse en términos de funciones elementales, sino que debe recurrirse a métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Es decir, no podemos obtener explícitamente el número de individuos de cada especie en un tiempo  $t$ . Sin embargo, hay algunas propiedades de tipo cualitativo, que son interesantes y a las que con frecuencia pueden darse respuestas satisfactorias sin necesidad de determinar explícitamente las soluciones.

Por ejemplo podemos preguntarnos:

¿Hay valores, llamados valores de equilibrio, para los cuales ambas especies coexisten permanentemente?

¿Permanecerán las poblaciones cerca de los valores de equilibrio para todo tiempo futuro?

Si conocemos el número de individuos (predadores y presas) de cada especie en un tiempo  $t_0$ , ¿Cuál será la evolución de las especies cuando transcurre el tiempo?

Si no tienden a valores de equilibrio, ¿triunfará una de las especies?

Del análisis de la bibliografía, de la historia y de los nuevos enfoques de enseñanza de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, es que nuestra propuesta se centra en:

- ◆ El estudio de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias bidimensionales con coeficientes constantes con el fin de una mayor intuición geométrica, a partir de sus diagramas de fases. Promoviendo el uso de la computadora para visualizar y resolver problemas complejos
- ◆ La descripción sistemática de todos los posibles comportamientos de tales sistemas a través de sus autovalores y autovectores. Ofreciendo un vasto conjunto de ejemplos y problemas.
- ◆ Mostrar la aplicación de las ecuaciones diferenciales en los distintos campos, como ser la biología, la ecología, la física y la ingeniería.
- ◆ Mostrar con ejemplos el análisis de los sistemas no lineales que pueden ser analizados en función de determinados sistemas lineales relacionados con ellos.

La estructura y el contenido de las clases de acuerdo a lo anterior la proponemos de la siguiente forma:

- Teoría general de los sistemas lineales
  - o Ejemplos motivadores
  - o Definición de solución
  - o Teorema de existencia y unicidad
- Sistemas de segundo orden
  - o Con coeficientes constantes
    - Homogéneas
    - No homogéneas
    - Métodos de resolución
    - Trabajo en computadora
- Introducción a la teoría cualitativa de los sistemas autónomos
  - o Plano de fases

- o Análisis de estabilidad para sistemas de segundo orden con coeficientes constantes
- Sistemas de mayor orden
- Aplicación a las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de mayor orden

## TAREAS FUTURAS

Del análisis anterior es que planificamos las siguientes tareas a futuro en vías de la factibilidad de la implementación de la propuesta elaborada.

Proponemos las siguientes acciones:

- Convocar a reunión a todos los profesores de la cátedra.
- Discutir en conjunto la propuesta.
- Desarrollar material en formato electrónico e impreso acorde a la propuesta acordada, para el estudio de estos temas por parte de los alumnos.
- Desarrollar actividades en software matemático MAPLE y/o MATLAB.
- Elaborar ejemplos y ejercicios motivadores, acordes a cada una de las distintas especialidades que se cursan en la Facultad de Ingeniería de la UNLP: Industrial Aeronáutica, Electrónica, Mecánica, Civil, Hidráulica, entre otras.
- Analizar la bibliografía a usar para el desarrollo de este tema, acorde con el enfoque dado en la propuesta.

## REFERENCIAS

- [1] Benitez López Julio [http://personales.upv.es/jbenitez/cajon\\_sastre/histed.pdf](http://personales.upv.es/jbenitez/cajon_sastre/histed.pdf). Universidad Politécnica de Valencia, 7 de Febrero de 2008
- [2] Bucari, N., Abate, S., Melgarejo A.; "Un cambio en la enseñanza de las Matemáticas en las carreras de Ingeniería de la UNLP: propuesta, criterios y alcance", *Anales del IV Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería*, Buenos Aires. Argentina; 2004
- [3] Bucari, N., Abate, S., Melgarejo A.; "Las clases de Matemática y la construcción de un contrato didáctico diferente" *Anales de INMAT 05*, Facultad de Ingeniería, UBA, Buenos Aires. 2005
- [4] Carlson David., Johnson Charles R., Lay David C, A. Duane Porter. The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal*, Vol. 24, No. 1, pp. 41-46. 1993.
- [5] Costa Viviana A. & M. Vacchino "Análisis del desarrollo de la implementación de una nueva asignatura de Matemática en la Facultad de Ingeniería, UNLP. La visión de los alumnos". XIII EMCI, Congreso Educación Matemática en carreras de Ingeniería. 2006.
- [6] Costa Viviana A. & Vacchino María Cristina. "Análisis del desarrollo de la implementación de una nueva asignatura de Matemática en la Facultad de Ingeniería, UNLP. La visión de los Profesores". XIII EMCI Congreso Educación matemática en carreras de Ingeniería. 2006.
- [7] Costa, Viviana Angélica, Vacchino María Cristina. "La enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal en la Facultad de Ingeniería, UNLP". XXI Congreso Chileno de Educación en Ingeniería. "Innovando en la educación para formar ingenieros innovadores". Universidad de Chile. Actas de Congreso. 2007.

- [8] Dorier J.L, Teaching Linear Algebra at University, in Li, Ta Tsien (ed.) et al., Proceedings of the international congress of mathematicians, ICM 2002, Pequín, China, 20-28 de agosto de 2002. Vol. III: Invited lectures. Beijing: *Higher Education Press*. 875-884. 2002.
- [9] Dorier J.-L. On the teaching of linear algebra, Dordrecht : Kluwer Academic Publisher. 2000.
- [10] Henry Ricardo. Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna. Editorial: Reverte, 2008.
- [11] Hillel J., Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. in J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp 191–207. 2000.
- [12] Kline Morris. El pensamiento matemático: de la antigüedad a nuestros días. Editorial: *Alianza Universidad*, Madrid, 2002.
- [13] Sierpinska A, Trgalova J., Hillel J., Dreyfus T., Teaching and Learning Linear Algebra with Cabri. Research Forum paper, Proceedings del PME 23, Haifa University, Israel, Vol 1, 119–134. 1999.